(46) 10/11

$f: E_1 \to E_2$

f συνεχής στο $a \in E_1 \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in E_1): \rho(x,a)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x),f(a))<\varepsilon\right]$

Πρόταση 1

f συνεχής στο $a \Leftrightarrow (\forall U(f(a)))(\exists V(a)): f(V(a)) \subseteq U(f(a)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall U(f(a)))$ το σύνολο $f^{-1}(U(f(a)))$ περιοχή του $a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν A με $\lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = a$ ισχύει $\lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} f(x_\nu) = f(a)$

$f: E_1 \to E_2$, $g: E_2 \to E_3$

$g \circ f: E_1 \to E_3$

Αν f, g συνεχείς στο $a \in E$, τότε και η $g \circ f$ συνεχής στο a

Πρόταση 2

Έστω $f: E_1 \to E_2$ τότε η f συνεχής αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα εξής:

(i) $\forall A \subseteq E_2$, A ανοιχτό, ισχύει: $f^{-1}(A)$ ανοιχτό (εν E_1)

(ii) $\forall K \subseteq E_2$, K κλειστό, ισχύει: $f^{-1}(K)$ κλειστό (εν E_1)

$\left(f^{-1}(X) = \{x : f(x) \in X\},\ X \subseteq E_2\right)$

$\left(f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c\right)$

Απόδειξη προτ. 2

$\boxed{f \text{ συνεχής} \Rightarrow (i)}$

Έστω $A \subseteq E_2$, A ανοιχτό. Θ.δ.ο. $f^{-1}(A)$ ανοιχτό. Ας είναι $x \in f^{-1}(A)$.

Τότε $f(x) \in A \xRightarrow{A \text{ ανοιχτό}} \exists\, U(f(x)) \subseteq A \xRightarrow{\text{f συν.}} (\exists\, V(x)): f(V(x)) \subseteq U(f(x))$

$\xRightarrow[(**): U(f(x)) \subseteq A]{(*): X \subseteq f^{-1}(f(X))} (\exists\, V(x)): V(x) \overset{(*)}{\subseteq} f^{-1}(f(V(x))) \subseteq f^{-1}(U(f(x))) \overset{(**)}{\subseteq} f^{-1}(A)$

$\Rightarrow V(x) \subseteq f^{-1}(A)$, x τυχόν $\Rightarrow f^{-1}(A)$ ανοιχτό

$\boxed{(i) \Rightarrow f \text{ συνεχής}}$

Έστω $U(f(x))$ τυχούσα περιοχή ενός τυχόντος σημείου f(x) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists r>0): B(f(x),r) \subseteq U(f(x)) \Rightarrow (\exists r>0): f^{-1}(B(f(x),r)) \subseteq f^{-1}(U(f(x)))$

$x \in \underbrace{f^{-1}(B(f(x),r))}_{\text{ανοιχτό}}$

$\Downarrow$

περιοχή του x

$\Rightarrow f^{-1}(U(f(x)))$ περιοχή του $x \Rightarrow f$ συνεχής στο $x \xRightarrow{x \text{ τυχόν}}$

f συνεχής $(\forall x)$

ΑΣΚΗΣΗ

$f(x)=\begin{cases} x+1 & , x>3 \\ 2x & , x\leq 3 \end{cases}$ με $f:(\mathbb{R}, ||) \to (\mathbb{R}, ||)$

Ν.δ.ο. η συνάρτηση δεν είναι συνεχής χρησιμοποιώντας την πρόταση 2 της προηγ. σελίδας

Παρατηρώ ότι στην ρ διακριτή μετρική: $f:(\mathbb{R},\rho) \to (\mathbb{R}, ||)$ είναι συνεχής γενικεύοντας:

$(\forall f)$ με $f:(\underset{\text{διακριτή}}{E_1, \rho_1}) \to (\underset{\text{τυχόν}}{E_2, \rho_2})$ η f είναι συνεχής

Έστω $f(x)=x^2$, $f:(\mathbb{R}, ||) \to (\mathbb{R}, ||)$

$f((-1,1))=[0,1)$

Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$, $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$((0,+\infty), ||)$: $f([1,+\infty))=(0,1]$

Δηλαδή μία συνεχής συνάρτηση δεν πηγαίνει ανοιχτά σε ανοιχτά (από παράδ.: $f(x)=x^2$ πιο πάνω) και επίσης μία συνεχής συνάρτηση δεν πηγαίνει κλειστά σε κλειστά (πχ.: $f(x)=\frac{1}{x}$)

E_1, E_2 σταθμ. δ.χ. $\underset{\text{συνεχείς}}{p, q}: E_1 \to \mathbb{R}$, $\underset{\text{συνεχείς}}{f, g}: E_1 \to E_2$

Ν.δ.ο. $pf+qg$ συνεχείς

Απόδειξη

$(pf+qg)(x)=\underset{\mathbb{R}}{p(x)}\,\underset{E_2}{f(x)}+\underset{\mathbb{R}}{q(x)}\,\underset{E_2}{g(x)}$, $x\in E_1$ άρα $(pf+qg)(x)$ εν E_2

Θεωρώ α τυχόν, $a\in E_1$ κ $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν E_1 με $\lim x_\nu = a$

$(p(x_\nu)f(x_\nu)+q(x_\nu)g(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν E_2

$\downarrow$

$p(a)f(a)+q(a)g(a)$ (από $p_\nu a_\nu + q_\nu g_\nu \longmapsto pa+qg$)

(48)

(E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ. $f,g: E_1 \to E_2$ κ $A\subseteq E_1$, A πυκνό εν E_1

τότε $f/A = g/A \xRightarrow{\text{συνεχείς}} f=g$

Απόδειξη

A πυκνό εν $E_1 \Rightarrow \bar{A} = E_1$ ισχύει.

Θ.δ.ο. $f(x)=g(x)$, $x\in E_1=\bar{A} \Rightarrow (\exists (x_\nu)_{\nu\in N}$ εν $A)$: $\lim_{\nu\in N} x_\nu = x$

$\xRightarrow{f,g \text{ συνεχείς}} \lim_{\nu\in N} f(x_\nu)=f(x)$ κ $\lim_{\nu\in N} g(x_\nu)=g(x) \xRightarrow{f(x_\nu)=g(x_\nu),\,\nu\in N} f(x)=g(x)$

$f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ συνεχής, $D\subseteq E_1$, D πυκνό εν E_1. Ν.δ.ο. $f(D)$ πυκνό εν E_2

D πυκνό $\iff \bar{D} = E \iff (\forall A\neq\emptyset$ ανοιχτό, $A\subseteq E_1)$: $A\cap D\neq\emptyset$

$f(D)$ πυκνό εν $E_2 \iff \emptyset\neq A\subseteq E_2$ (A τυχόν ανοιχτό) ισχύει:

$f(D)\cap A\neq\emptyset$.

$\emptyset \neq A\subseteq E_2$ (ανοιχτό) $\xRightarrow{f \text{ συνεχής και επί}} f^{-1}(A)$ ανοιχτό κ $f^{-1}(A)\neq\emptyset$

$\xRightarrow{D \text{ πυκνό εν } E_1} f^{-1}(A)\cap D\neq\emptyset \Rightarrow f(f^{-1}(A)\cap D)\neq\emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f^{-1}(A))\cap f(D)\neq\emptyset \Rightarrow A\cap f(D)\neq\emptyset$